

## Лекция 4

**Математические модели и  
методы теории надежности,  
используемые в  
САПР КЭС**

# Вопросы лекции

1. Основные понятия теории надежности.
2. Математические модели и методы теории надежности электронных средств и систем.
3. Методы теории графов при оценке надежности электронных средств и систем.

## **Вопрос 1.**

# **Основные понятия теории надежности**

Надежность является одним из важнейших показателей качества ЭС и выражает прежде всего свойство изделия функционировать и сохранять свои параметры в течение определенного срока в заданных условиях. Надежность является комплексным показателем качества, состоящим из ряда частных, таких как безотказность, долговечность, ремонтпригодность, сохраняемость и др.

Математические модели надежности необходимы при проектировании ЭС для выбора наиболее подходящего варианта, который будет обеспечивать эффективное функционирование аппаратуры при ее реальной эксплуатации. Кроме того, модели надежности используются в ходе решения задач диагностики неисправностей, планирования ремонтно-профилактических работ и формирования комплектов запасных частей.

Построение модели надежности начинается с формирования ответов на три основных вопроса:

1. Какие состояния системы приводят к ее отказу?
2. Каков характер процессов возникновения отказов?
3. Какую конфигурацию имеет система?

## 1. Какие состояния системы приводят к ее отказу?

Ответ на первый вопрос предполагает проведение анализа объекта на предмет выявления таких предельных эксплуатационных режимов, вредных воздействий окружающей среды, ошибок операторов, которые по отдельности или в совокупности приводят к отказу системы, при этом факт возникновения отказа устанавливается соответствующими критериями согласно нормативно-технической документации. Следует иметь в виду, что под отказом понимается событие, заключающееся в нарушении способности ЭС выполнять заданную функцию. Различают частичный, полный, зависимый и независимый отказы. При частичном отказе ЭС может выполнять свои отдельные функции, а полный отказ приводит к полной потере работоспособности. Причиной зависимого отказа ЭС может стать неисправность какого-либо элемента или блока, входящего в состав изделия. Соответственно независимый отказ не вызывается прямо или косвенно каким-либо другим отказом или неисправностью.

## 2. Каков характер процессов возникновения отказов?

Ответ на второй вопрос предусматривает описание процессов возникновения отказов с помощью вероятностных законов и дифференциальных уравнений.

## 3. Какую конфигурацию имеет система?

Ответ на третий вопрос связан с определением структуры системы, учитывающей характер соединения компонентов, алгоритм функционирования, наличие резервирования, схему обслуживания и т. п.

Важную роль при рассмотрении надежности играет выделение класса системы по отношению к ремонту и восстановлению. Восстановление — это процесс обнаружения и устранения отказа (повреждения) с целью восстановления его работоспособности. Объект называется восстанавливаемым, если работоспособность его в случае возникновения отказа подлежит восстановлению в рассматриваемых условиях, и невосстанавливаемым — если не подлежит. Один и тот же объект в зависимости от ситуации может быть восстанавливаемым или невосстанавливаемым. Например, аппаратура космического аппарата на этапе хранения и подготовки к старту — восстанавливаемая, а во время полета — невосстанавливаемая.



Ремонт представляет собой комплекс операций по восстановлению исправности и работоспособности объекта, а также восстановлению ресурса объекта или его составных частей. Заметим, что ресурс (технический ресурс) — наработка объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после среднего или капитального ремонта до наступления предельного состояния. Под наработкой понимается продолжительность или объем работы объекта.

Ремонт объекта может выполняться заменой или восстановлением отдельных элементов и сборочных единиц. Объект называется ремонтируемым, если исправность его в случае возникновения отказа или повреждения подлежит восстановлению, проведение ремонта объекта предусматривается в нормативно-технической документации. Объект, исправность и работоспособность которого в случае возникновения отказа (повреждения) не подлежит восстановлению, — неремонтируемый. Таким образом, понятие «ремонт» предусматривает возможность замены отказавших частей и не увязывается с рассматриваемыми условиями (ситуацией).

## Классификация объектов по отношению к ремонту и восстановлению



Основным компонентом модели надежности объекта, т. е. технического изделия (элемента, системы) определенного целевого назначения, рассматриваемого в период проектирования, является закон распределения случайного времени  $T$  работы до отказа. Существуют два основных пути определения распределения времени  $T$ . Первый состоит в использовании априорных сведений о надежности элементов системы в виде кривых интенсивностей отказов. Второй метод оперирует с эмпирическими данными, полученными в результате проведения и обработки результатов испытаний, а также при наблюдении за работой различных образцов оборудования в процессе эксплуатации систем, в которых применяются аналогичные элементы, работающие в подобных условиях. При таком подходе по полученным экспериментальным данным строят гистограмму для времени  $T$  и определяют соответствующую функцию распределения отказов. Наиболее предпочтительна комбинация указанных методов, когда для определения распределения времени  $T$  используются достаточные статистические данные и представление о механизме возникновения отказов на основе физико-химических и других соображений.

Говоря о надежности того или иного технического объекта, следует всегда предполагать, что отказ этого объекта четко определен. Без сформулированного понятия *отказ* невозможно правильно истолковать, что такое *время до отказа*, а следовательно, задать и показатели надежности.

Отказом может быть либо полное и мгновенное прекращение функционирования системы, либо снижение эффективности ее функционирования до некоторого недопустимого (заданного) уровня (рис. 1.2). Обычно отказы по этим признакам подразделяются на два типа: внезапные и постепенные.

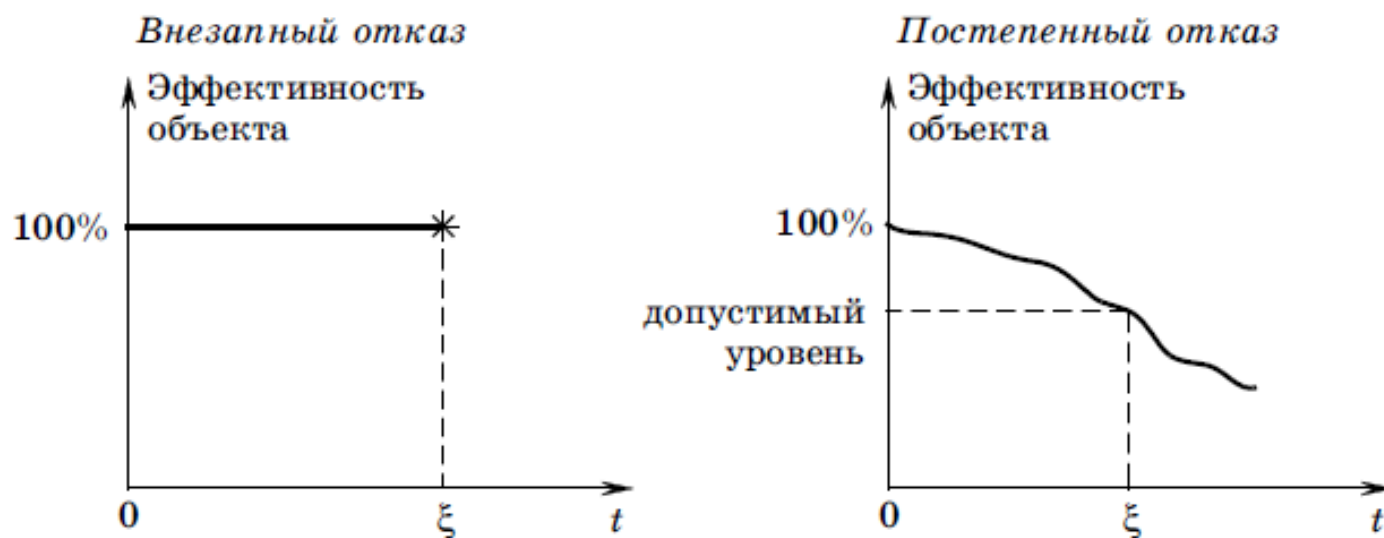


Рис. 1.2

## Вопрос 2

**Математические модели и методы  
теории надежности электронных  
средств и систем**

Для количественной оценки надежности используют показатели. Неремонтируемые объекты работают до первого отказа, основные показатели надежности которых и формулы оценки показателей по результатам испытаний приведены в таблице 3.5 [3].

Вероятность безотказной работы  $R(t)$  на временном интервале  $[0; t]$  и вероятность отказа  $Q(t)$  (в зарубежной литературе их иногда называют соответственно функциями надежности и ненадежности) определяются непосредственно по функции распределения  $F(t)$  случайного времени наработки до отказа  $T$ , т. е.

$$R(t) \triangleq P[T > t] = 1 - F(t), Q(t) \triangleq P[T \leq t] = F(t).$$

Одним из самых простых показателей надежности невосстанавливаемых объектов является среднее время работы до отказа, т. е. математическое ожидание случайной величины  $\xi$ .

Среднее время работы до отказа определяется как

$$T = E\{\xi\} = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x dF(x),$$

где  $f(x)$  и  $F(x)$  — соответственно плотность и функция распределения случайной величины времени работы до отказа\*.

Для характеристики изменения надежности во времени удобно использовать функцию интенсивности отказов, которая обычно обозначается через  $\lambda(t)$ .

Формально функция интенсивности отказов определяется как

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)},$$

т. е.  $\lambda(t)$  есть условная плотность вероятности отказа в момент  $t$ , если до этого момента отказ еще не произошел.

Физический смысл функции  $\lambda(t)$  становится понятным, если записать эквивалентное выражение

$$\lambda(t) \Delta t = \frac{f(t) \Delta t}{P(t)},$$

в котором

- ✓ величина  $f(t) \Delta t$  — абсолютная вероятность отказа во временном интервале  $[t, t + \Delta t]$ ;
- ✓  $\lambda(t) \Delta t$  — условная вероятность отказа объекта в интервале  $[t, t + \Delta t]$  при условии, что объект не отказал до момента  $t$ ;
- ✓  $P(t)$  — вероятность того, что объект не отказал до момента  $t$ .



Таблица 3.5

## Показатели надежности и формулы их оценки

Показатели надежности	Формулы оценки
Вероятность безотказной работы — вероятность выполнить заданную функцию при данных условиях в пределах интервала времени $[0; t]$	$\hat{R}(t) = N(t) / N$
Средняя наработка до отказа — математическое ожидание случайной наработки $T$ до первого отказа, ч	$\hat{m}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N T_i$
Интенсивность отказов, 1/ч — условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая для рассматриваемого момента $t$ наработки при условии, что до этого момента отказ не возник	$\hat{\lambda}(t) = \frac{N(t) - N(t + \Delta t)}{N(t) \cdot \Delta t}$

Здесь  $N(t)$  — число объектов, работоспособных к моменту времени  $t$ ;  $N$  — число испытываемых объектов;  $T_i$  — наработка до отказа  $i$ -го объекта.

Функциональные связи между показателями  $R(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $m_t$  и плотностью распределения времени до отказа  $\varphi(t)$  приведены в таблице 3.6.

Таблица 3.6

Связь между показателями надежности

Определяемый показатель надежности	Известный показатель надежности			
	$R(t)$	$Q(t)$	$\varphi(t)$	$\lambda(t)$
$R(t)$	$R(t)$	$1 - Q(t)$	$\int_t^{\infty} \varphi(x) dx$	$\exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right]$
$Q(t)$	$1 - R(t)$	$Q(t)$	$\int_0^t \varphi(x) dx$	$1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right]$
$\varphi(t)$	$-\frac{d}{dt} R(t)$	$\frac{d}{dt} Q(t)$	$\varphi(t)$	$\lambda(t) \exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right]$
$\lambda(t)$	$-\frac{1}{R(t)} \frac{d}{dt} R(t)$	$\frac{1}{1 - Q(t)} \frac{d}{dt} Q(t)$	$\frac{\varphi(t)}{\int_t^{\infty} \varphi(x) dx}$	$\lambda(t)$
$m(t)$	$\int_0^{\infty} R(t) dt$	$\int_0^{\infty} [1 - Q(t)] dt$	$\int_0^{\infty} t \varphi(t) dt$	$\int_0^{\infty} \exp\left[-\int_0^t \lambda(x) dx\right] dt$

Вероятность безотказной работы в течение интервала  $[t_1; t_2]$  определяется по формуле

$$R(t_1, t_2) = \frac{R(t_2)}{R(t_1)} = \exp \left[ - \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt \right].$$

Конкретный вид функций  $P(t)$ ,  $\lambda(t)$  определяется законом распределения случайной наработки до отказа  $T$ . Во многих случаях на практике функция  $\lambda(t)$  имеет вид, показанный на рисунке 3.41.

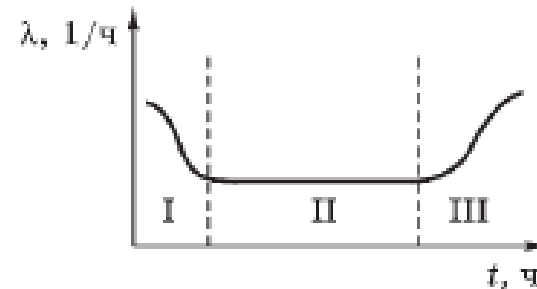


Рис. 3.41  
Вид функции  $\lambda(t)$

Здесь можно выделить участки приработки (I), нормальной работы (II) и «старения» (III). Иногда как показатель рассматривают среднюю интенсивность отказов  $\bar{\lambda}$  за время, соответствующее техническому ресурсу  $t_p$ , т. е.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} \lambda(t) dt, \quad (3.47)$$

а также суммарную наработку  $t_n$  до начала массовых параметрических отказов, которые характеризуются отклонением значения хотя бы одного рабочего параметра за пределы допуска.

Если система состоит из  $n$  элементов и отказ любого из них приводит к отказу всей системы, то такое соединение элементов в смысле надежности называется последовательным. Показатели надежности систем по известным характеристикам элементов в предположении, что они соединены последовательно, рассчитываются по следующим формулам.

Вероятность безотказной работы  $R(t)$  системы на временном интервале  $[0; t]$  равна произведению вероятностей безотказной работы  $R_i(t)$ ,  $i = 1, n$  элементов, т. е.

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t), \quad (3.48)$$

или для отрезка времени  $[t_0, t_0 + \tau]$ :

$$R(t_0, t_0 + \tau) = \prod_{i=1}^n R_i(t_0, t_0 + \tau). \quad (3.49)$$

Интенсивность отказов  $\Lambda(t)$  системы равна сумме интенсивностей отказов  $\lambda_i(t)$  элементов, т. е.

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t). \quad (3.50)$$

Плотность вероятности  $f(t)$  времени работы до отказа системы определяется по формуле

$$f(t) = R(t) \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(t)}{R_i(t)}, \quad (3.51)$$

где  $\varphi_i(t)$  — плотность вероятности отказов  $i$ -го элемента.

Среднее время  $m_t$  работы системы до отказа при сроке службы  $t_{\text{сл}}$  рассчитывается следующим образом:

$$m_t = \left( \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \right)^{-1}; \quad \bar{\lambda}_i = \frac{1}{t_{\text{сл}}} \int_0^{t_{\text{сл}}} \lambda_i(t) dt.$$

Если для элементов имеет место показательный закон распределения времени работы до отказа, т. е. выполняется условие экспоненциального закона надежности, то формулы (3.48)–(3.51) принимают следующий вид:

$$R(t) = e^{-\Lambda t}; \quad R(t_0, t_0 + \tau) = e^{-\Lambda \tau}; \quad \Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i; \quad f(t) = \Lambda e^{-\Lambda t}; \quad m_t = \frac{1}{\Lambda}.$$

Значительная доля отказов систем связана с выходом ее параметров за пределы допуска, т. е. установленные расчетом или экспериментально границы, при которых объект способен выполнять заданные функции. Задача установления допусков с учетом требований надежности и проверка их обеспечения является одной из наиболее сложных и ответственных при проектировании систем и анализе метрологических характеристик ЭС [3].

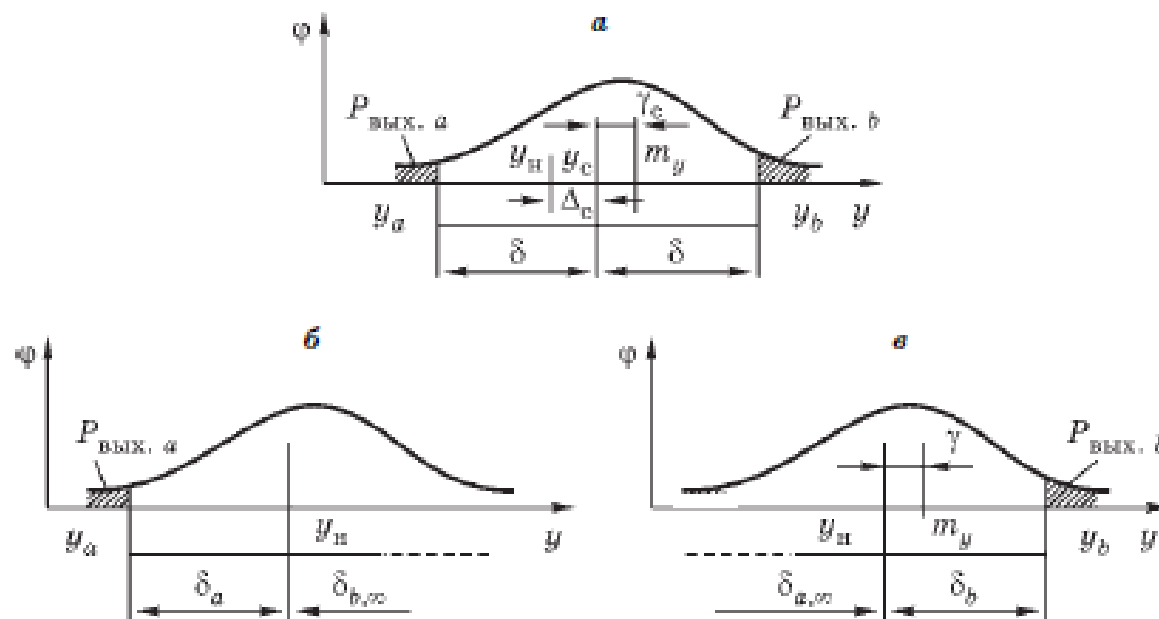
Конструируемый объект обычно характеризуется рядом параметров, от значений которых зависит качество его функционирования. К таким параметрам относятся характеристики элементов, модулей, узлов, блоков, системы в целом. Например, размеры детали, омическое сопротивление резистора, емкость конденсатора, коэффициент усиления и т. д. Значение параметра зависит от большого числа факторов, поэтому его рассматривают как случайную величину.

Область допустимого изменения параметра называется допусковой областью, обозначим ее  $S_d$ . Для  $n$ -мерного вектора параметров  $y = (y_1, \dots, y_n)$  область  $S_d$  является  $n$ -мерным параллелепипедом. Условие  $y \in S_d$ , т. е. что значение  $y$  принадлежит допусковой области, проверяется выполнением соотношений  $y_{i,a} < y_i < y_{i,b}$ ,  $i = 1, n$ , где  $y_{i,a}$ ,  $y_{i,b}$  — граничные значения для составляющей  $y_i$ . Выход вектора  $y$  из области  $S_d$  рассматривается как отказ объекта. Наряду с областью  $S_d$  может вводиться область работоспособного состояния  $S_p$  такая, что

$$S_d \subset S_p. \quad (3.52)$$

Из соотношения (3.52) следует, что применение области  $S_d$  вместо  $S_p$  при вычислении показателей надежности дает некоторую избыточность получаемых результатов.

Допуски делятся на две основные группы — двусторонние и односторонние (рис. 3.42а–в).



**Рис. 3.42**  
Допуски:

*a* — двусторонний; *б, в* — односторонние.

В одномерном случае область  $S_d$  определяется следующими характеристиками: поле допуска  $2\delta$ , нижняя  $y_a$  и верхняя  $y_b$  границы поля допуска, середина поля допуска  $y_c$ , номинальное значение параметра  $y_n$  и смещение  $y_c$  относительно номинального значения  $\Delta_c$ . Эти характеристики связаны соотношениями:

$$\delta = (y_b - y_a) / 2, \quad y_c = (y_a + y_b) / 2, \quad \Delta_c = y_c - y_n.$$



При анализе системы могут решаться прямая и две обратные задачи, которые связаны с сопоставлением распределения параметра  $y$  и характеристик поля допуска.

В случае прямой задачи задается закон распределения параметра  $y$ , например в виде плотности вероятности  $\varphi(y)$ , и поле допуска, характеризуемое параметрами  $y_a$ ,  $y_b$  и  $y_c$ . Требуется определить вероятность выхода параметра из допусковой области, т. е.  $P[y \notin S_d] = P_{\text{вых}}$ .

При первой обратной задаче задается плотность  $\varphi(y)$  и допустимая вероятность  $P_{\text{вых.д}}$ . Требуется определить характеристики поля допуска такие, чтобы для них выполнялось условие

$$P_{\text{вых}} \leq P_{\text{вых.д}} \quad (3.53)$$

Во второй обратной задаче по известным характеристикам поля допуска и допустимой вероятности  $P_{\text{вых.д}}$  надо определить характеристики распределения  $y$ , при которых будет выполняться условие (3.53).

В основе решения этих задач лежат следующие формулы расчета вероятности  $P_{\text{вых}}$ , соответствующие трем случаям, приведенным на рисунке 3.42:

$$\begin{aligned} P_{\text{вых}} &= P_{\text{вых.ab}} = P_{\text{вых.a}} + P_{\text{вых.b}} = \\ &= 1 - \int_{y_a}^{y_b} \varphi(y) dy = 1 - \int_{y_n + \Delta_c - \delta}^{y_n + \Delta_c + \delta} \varphi(y) dy; \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$P_{\text{вых}} = P_{\text{вых.a}} = 1 - \int_{y_n - \delta_a}^{\infty} \varphi(y) dy; \quad (3.55)$$

$$P_{\text{вых}} = P_{\text{вых.b}} = 1 - \int_{-\infty}^{y_n + \delta_b} \varphi(y) dy. \quad (3.56)$$

Исследования показывают, что в большинстве случаев распределение значения параметра  $y$  по полю допуска для фиксированного момента времени близко к нормальному. При нормальном законе распределения  $y$  формулы (3.54)–(3.56) для расчета  $P_{\text{вых}}$  принимают следующий вид:

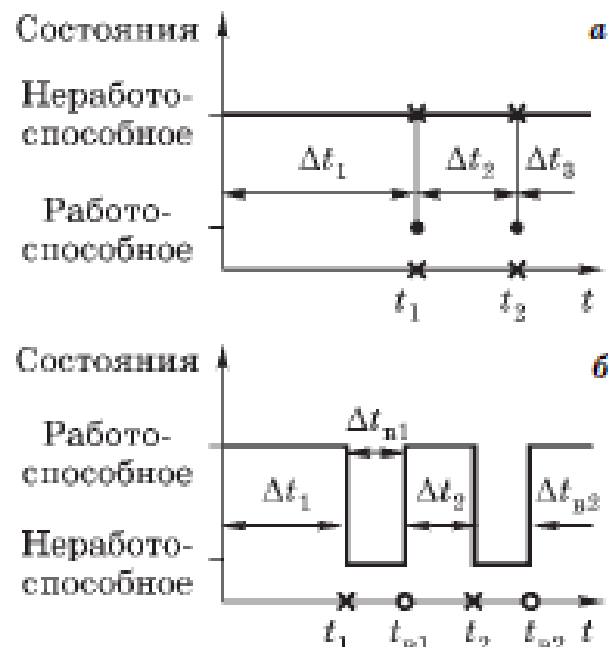
$$P_{\text{вых}.ab} = 1 - \left[ \Phi\left(\frac{y_b - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{y_a - m_y}{\sigma_y}\right) \right];$$
$$P_{\text{вых}.a} = \Phi\left(\frac{y_a - m_y}{\sigma_y}\right); \quad P_{\text{вых}.b} = 1 - \Phi\left(\frac{y_b - m_y}{\sigma_y}\right),$$

где  $m_y$ ,  $\sigma_y$  — математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение случайной величины  $y$ ;  $\Phi(z)$  — функция распределения нормального закона ( $m=0$ ,  $\sigma=1$ ), т. е.

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx.$$

Для ремонтируемых восстанавливаемых (обслуживаемых) объектов при их использовании в течение заданного времени работы  $[t_1, t_k]$  допускаются отказы и вызванные ими кратковременные перерывы в работе. В процессе эксплуатации такого объекта чередуются случайные периоды времени безотказной работы  $T^{(i)}$  и времени восстановления (ремонта)  $T_B^{(i)}$  (рис. 3.44б), т. е. имеет место альтернирующий процесс функционирования объекта.

Надежность объектов данного класса характеризуется рядом комплексных (коэффициенты готовности, оперативной готовности, технического использования, характеризующих безотказность и ремонтпригодность) и единичных ( $m_t, R(t, t + \tau)$ , характеризующих безотказность, или среднее время восстановления, характеризующее ремонтпригодность) показателей.



**Рис. 3.44**

Поток отказов (а)  
и реализация случайного  
процесса эксплуатации  
восстанавливаемого объекта (б)

Для повышения надежности ремонтируемых восстанавливаемых объектов, не допускающих перерывов в работе (обычно из-за опасных последствий отказов), вводится резервирование, при этом отказавший элемент может ремонтироваться во время работы резервного. Для таких объектов в основном используются те же показатели надежности, что и для ремонтируемых невосстанавливаемых объектов. Различают пять видов резервирования:

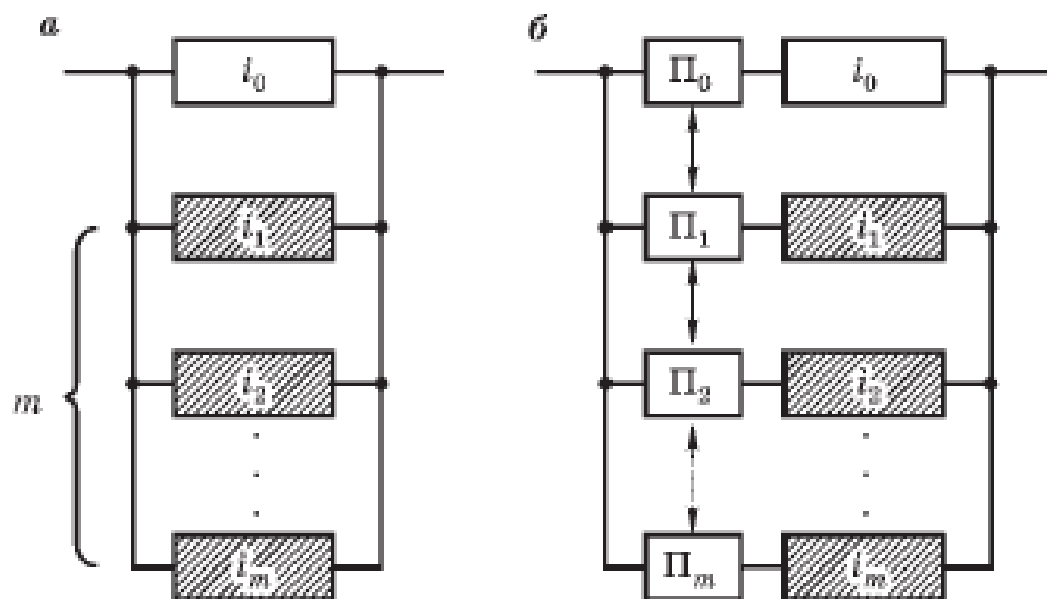
- 1) структурное (аппаратное), предусматривающее использование избыточных структурных элементов (электронных модулей);
- 2) временное (с применением резерва времени);
- 3) нагрузочное (используется запас по нагрузке);
- 4) функциональное (компоненты с избыточными функциями);
- 5) информационное (избыточность приема, передачи и хранения информации).

Наиболее часто используются структурное и временное резервирование. Под структурным резервированием понимается метод повышения надежности системы, предусматривающий использование избыточных структурных элементов.

#### Классификация способов структурного резервирования

Признак классификации	Способ резервирования	Описание
Способ включения резерва	Постоянное резервирование	Резервные элементы участвуют в функционировании наравне с основным
	Резервирование замещением	Функции основного элемента передаются резервным элементам после его отказа
Схема включения резерва	Общее резервирование	Резерв предусматривается на случай отказа объекта в целом
	Раздельное резервирование	Резерв предусматривается на случай отказов отдельных элементов или их групп
Состояние резерва	Ненагруженный резерв	Резервные элементы практически не несут нагрузок
	Облегченный резерв	Резервные элементы находятся в менее нагруженном режиме, чем основной
	Нагруженный резерв	Резервные элементы работают в том же режиме, что и основной элемент
Однородность резервирования	Однородное резервирование	Резервирование имеет один вид по соответствующему признаку классификации
	Смешанное резервирование	Совмещение в объекте различных видов резервирования
Кратность резервирования	Однократное резервирование	Кратность резервирования равна единице (дублирование)
	Многократное резервирование	Кратность резервирования свыше единицы

Элемент (узел), минимально необходимый для выполнения системой заданных функций, называется основным или рабочим, элементы, обеспечивающие работоспособность системы в случае отказа основного элемента, — резервными. На структурной схеме расчета надежности резервные элементы размещаются параллельно основному. Резервные элементы могут иметь соединение с основным элементом без переключателя и с переключателем, как показано на рисунке



**Рис**

Параллельное соединение элементов в структурной схеме надежности:  
*a* — нагруженный резерв; *b* — ненагруженный резерв с переключателями.

Для невозстанавливаемой системы вероятность  $R_{i(m)}(t)$  безотказной работы  $i$ -го узла на интервале времени  $[0; t]$  при  $m$ -кратном нагруженном резерве (без переключателей) определяется по формуле

$$R_{i(m)}(t) = 1 - \prod_{j=0}^m [1 - R_{ij}(t)],$$

где  $R_{0j}(t)$ ,  $R_{ij}(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$  — вероятности безотказной работы основного и  $j$ -го резервного элементов соответственно.

В данном случае отказ  $i$ -го узла наступает, когда выйдут из строя все  $m + 1$  элементы. Если основной и резервные элементы, работающие в одном режиме, одинаковы, то

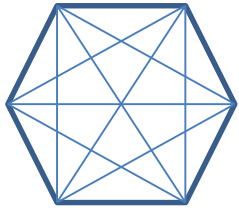
$$R_{i(m)}(t) = 1 - [1 - R_{ij}(t)]^{m+1}.$$

## **Вопрос 3**

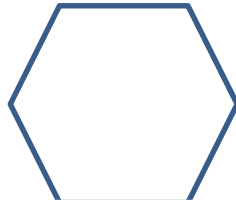
**Методы теории графов при оценке  
надежности электронных средств и  
систем**



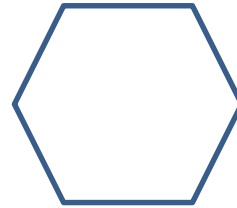
- Основным признаком работоспособного состояния некоторой радиоэлектронной системы, моделируемой графом, является наличие **связности** (т.е. наличия хотя бы одного пути) между всеми (или заданными) вершинами графа.
- Для связных графов используется количественная характеристика связности, являющаяся мерой **структурной надежности**. **Связностью** Графа  $G$  (**вершинной связностью**) называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. Так, например, полный граф из  $N$  вершин имеет связность (коэффициент связности  $K_{св}$ )  $N-1$ ; простая цепь из любого числа вершин имеет связность 1; простой цикл из любого числа вершин имеет связность 2; «колесо» из любого числа вершин имеет связность 3.



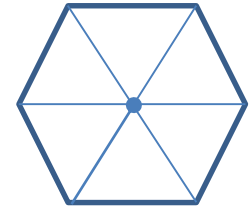
а)  
 $N=6, K_{св}=5$   
 полный граф



б)  
 $N=6, K_{св}=1$   
 простая цепь



в)  
 $N=6, K_{св}=2$   
 простой цикл



г)  
 $N=7, K_{св}=3$   
 «колесо»

- Наименьшее число рёбер графа  $G$ , удаление которых приводит к несвязному подграфу, называется **рёберной связностью** графа  $G$ . Для многих графов, в частности, для приведенных выше на рисунке, вершинная связность совпадает с реберной.
- При оценке надежности РЭС, моделируемых случайными графами, орграфами и мультиграфами удобнее учитывать именно реберную связность. При этом все вершины считаются идеальными (безотказными), а надежность соединений любой пары вершин оценивается по вероятности их связности с учетом надежности соединяющих их ребер.

**Определение 1.** Граф  $G(V, U)$  называется  $\omega$ -связным, если  $\omega$  — наименьшее число вершин, которые нужно удалить из  $G$ , чтобы оставшийся подграф был несвязным или тривиальным ( $\omega = \omega(G)$ ).

Из определения следует, что связность несвязного графа равна нулю. Полносвязный граф нельзя сделать несвязным, сколько бы вершин из него не удалять, а тривиальный граф получается после удаления из него  $n-1$  вершин ( $n$  — число вершин полностью связного графа). Иногда  $\omega(G)$  называют вершинной связностью.

**Определение 2.** Реберная связность  $\lambda = \lambda(G)$  графа  $G(V, U)$  определяется как наименьшее количество ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Очевидно, что  $\lambda(G_1)$ , где  $G_1$  — тривиальный граф, равно нулю.

Интересна и очень важна по своему содержанию теорема Уитни, объединяющая связность, реберную связность и наименьшую степень вершин графа.

**Теорема 1.** Для любого графа  $G(V, U)$

$$\omega(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G),$$

где  $\delta(G)$  — минимальная степень вершин в графе  $G$ .

## ЛИНЕЙНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ СВЯЗНОСТИ СТРУКТУРЫ СЕТИ СВЯЗИ

Ограниченные возможности применения известных показателей связности при решении задач анализа и синтеза сетей связи вынуждают исследователей расширить поиск таковых, чтобы снять (насколько возможно) отмеченные выше трудности, а также попытаться решить еще нерешенные задачи. Предлагаемый ниже материал является одной из таких попыток.

Рассмотрим некоторый линейный функционал, представляющий собой линейную комбинацию определенным образом выбранных параметров связности, составленную по всем узлам (вершинам) сети связи (графа). Такими параметрами могут быть относительная и абсолютная связности каждого узла (каждой вершины) рассматриваемой сети связи (графа).

На основании рассмотренных параметров запишем общий вид линейного функционала:

$$K = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left[ \frac{H_i}{N - N_i} + \frac{N_i}{N} \right],$$

где  $i$  — номер узла (вершины) в сети связи (графе);  $N$  — общее число узлов (вершин) сети связи (графа);  $H_i$  — ранг  $i$ -го узла (вершины);  $N_i$  — число узлов (вершин), с которыми  $i$ -й узел (вершина) может иметь связь в сети (графе);  $\alpha_i$  — коэффициент веса  $i$ -го узла (вершины).

## АНАЛИЗ СВЯЗНОСТИ СТРУКТУРЫ СЕТИ СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

**Определение 3.** Остовным подграфом  $G_p$  графа  $G$  называется граф  $G(V, U_p)$ , для которого  $U_p \subset U$ .

Таким образом, остовной подграф имеет то же множество вершин, что и граф  $G$ , но множество ребер подграфа  $G_p$  является подмножеством множества ребер исходного графа.

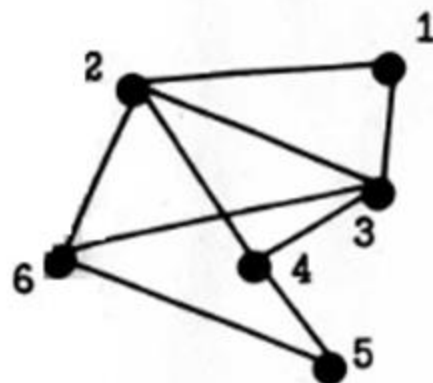
**Определение 4.** Нижеследующие определения неориентированного дерева эквивалентны друг другу.

Неориентированным деревом является:

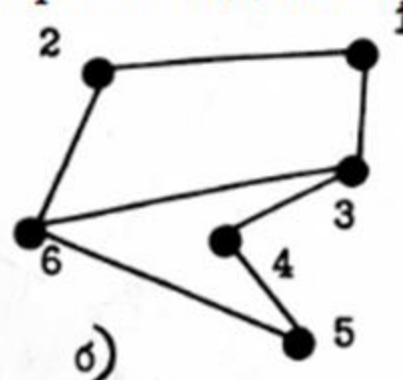
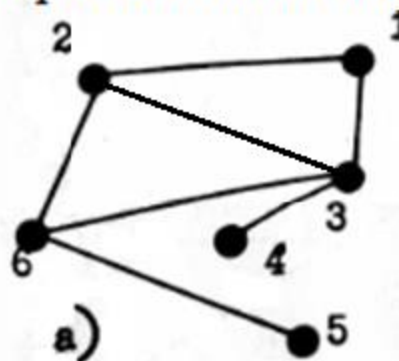
- 1) связный граф, не имеющий циклов;
- 2) граф, не содержащий циклов и имеющий  $n - 1$  ребер;
- 3) связный граф, содержащий  $n$  вершин и  $n - 1$  ребер;
- 4) граф, в котором каждая пара вершин соединена одной и только одной простой цепью.

**Определение 5.** Если  $G(V, U)$  — неориентированный граф с  $n$  вершинами, то остовным деревом (или остовом) графа  $G$  называется всякий остовной подграф графа  $G$ , являющийся деревом.

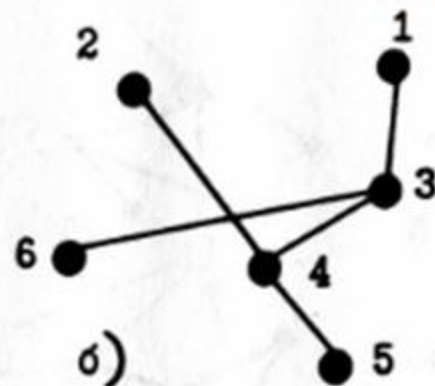
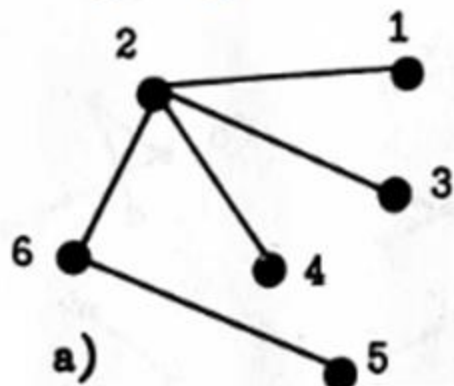
# Пример исходного графа



## Примеры остовных подграфов исходного графа



## Примеры остовных деревьев исходного графа



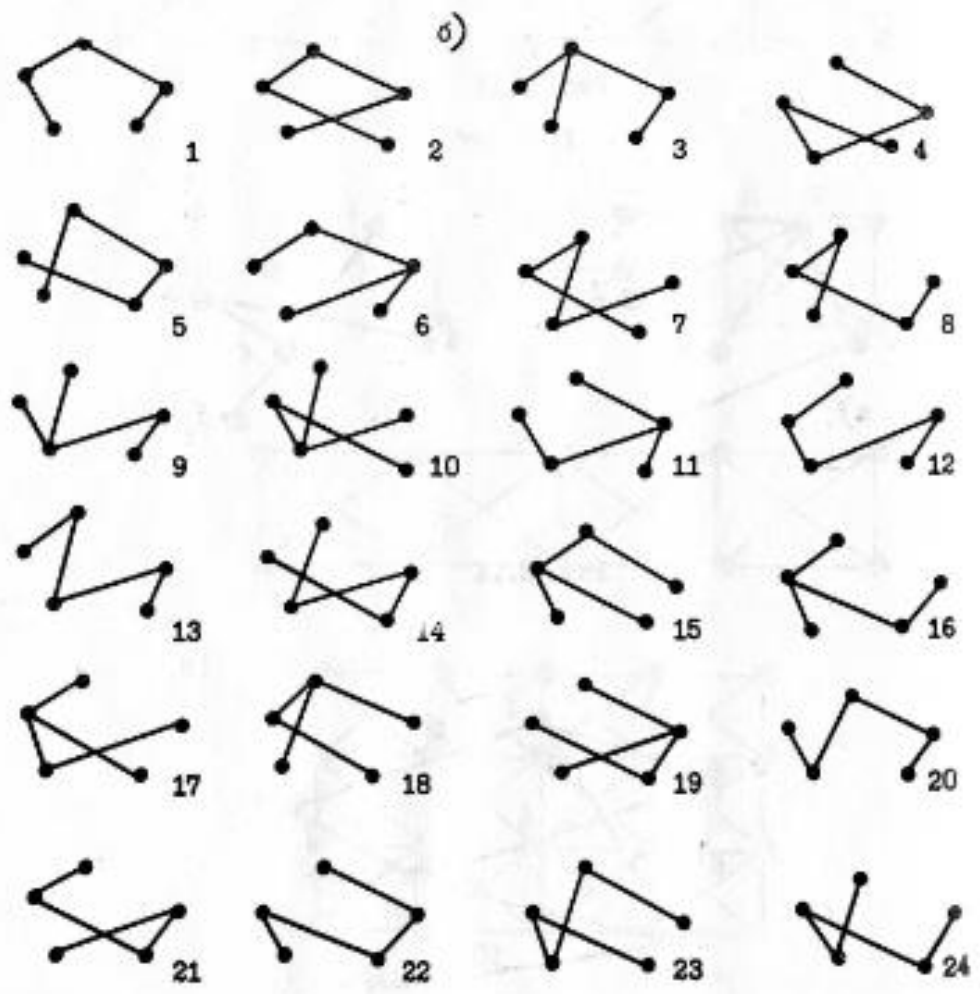
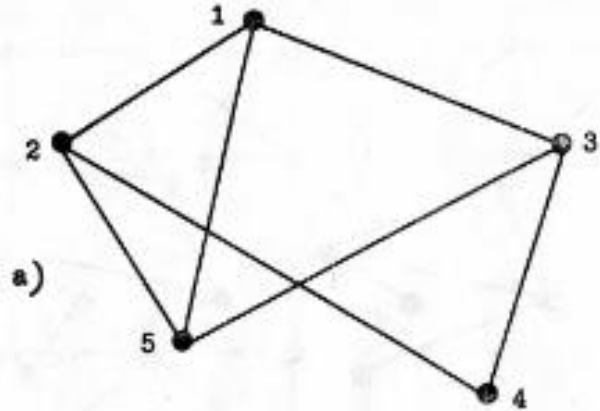
1. Наличие в графе  $G$  по крайней мере одного остоного дерева  $T(G)$  означает, что данный граф  $G$  является связным графом. Отсутствие же остонных деревьев ( $T(G) = 0$ ) приводит к несвязности графа  $G$ .

2. Очевидно, что чем больше остонных деревьев  $T(G)$  содержится в графе  $G$ , тем более связным он является.

*Теорема* . В графе  $G$  без петель число остонных деревьев равно минору любого из элементов главной диагонали квадратной матрицы  $(s_j^i)$  порядка  $n$ , где

$$s_j^i = \begin{cases} \deg v_i & (i = j); \\ -1 & (i \neq j, [v_i, v_j] \in U); \\ 0 & (i \neq j, [v_i, v_j] \notin U) \end{cases}$$

( $\deg v_i$  означает степень вершины  $v_i$  в графе  $G$ , а  $[v_i, v_j]$  — ребро, соединяющее вершины  $v_i$  и  $v_j$ ).



## НЕЗАВИСИМЫЕ ОСТОВНЫЕ ДЕРЕВЬЯ.

Два остовных дерева называются независимыми, если они не имеют общих ребер (ветвей). По определению, каждое остовное дерево содержит  $n - 1$  ребер (ветвей) и является минимальным связным подграфом. Отсюда следует, что максимальное число независимых остовных деревьев в графе порядка  $n$  с  $m$  ребрами (ветвями) будет определяться отношением  $\left\lfloor \frac{m}{n-1} \right\rfloor$ . Для полносвязного графа, у которого число ребер (ветвей) равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ , максимально возможное число независимых остовных деревьев будет равно  $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ .

Независимые остовные деревья в графе можно рассматривать как самостоятельные графы одинакового порядка с одинаковым числом ребер (ветвей), а в графе они наложены друг на друга путем совмещения соответствующих вершин. Понятно, что чем их больше в графе, тем он более живучий. Во всяком случае, если граф имеет  $t$  независимых остовных деревьев, то для нарушения его связности потребуется изъять из него не менее  $t$  ребер (ветвей).



Вообще о структурной живучести можно было бы судить по числу независимых остовных деревьев в графе, однако эта оценка еще далека от совершенства. Так, в графе одиннадцатого порядка ( $n=11$ ) максимальное число независимых остовных деревьев

$$t = \left[ \frac{n}{2} \right] = 5.$$

Если  $m=40$ , то число независимых остовных деревьев

$$t = \left[ \frac{40}{10} \right] = 4.$$

Для  $m=30$  число независимых остовных деревьев не превосходит 3. Однако между  $m=30$  и  $m=40$  существует множество из  $C_p^{40} - C_p^{30}$  (где  $p = C_{11}^2$ ) различных структур (графов), причем максимальное увеличение числа независимых остовных деревьев у этого огромного множества структур (графов) может произойти не более чем на единицу. Такая «шкала измерения» значений структурной живучести, конечно, является очень грубой. Например, диапазон изменения числа остовных деревьев для приведенного примера будет определяться значениями 2 770 509 для  $m=30$  и 67 807 924 для  $m=40$ .

## Анализ вероятностных сетевых моделей

Вероятностной сетевой моделью называется граф с заданным распределением связей и совместным распределением вероятностей состояний дуг.

Вероятностная сетевая модель отличается от сетевой тем, что помимо связей должны быть заданы вероятности их состояний. Для описания состояния связей вводят следующие характеристики:

- $P_{i,j}$  — вероятность исправного состояния дуги;
- $P_{\langle i,k,\dots,j \rangle}$  — вероятность исправного состояния маршрута;
- $P(l_{i,j})$  — вероятность исправного состояния направления;
- $q_{i,j}$  — вероятность отказа дуги;
- $q_{\langle i,k,\dots,j \rangle}$  — вероятность отказа маршрута;
- $q(l_{i,j})$  — вероятность отказа направления.

Очевидными являются равенства

$$P_{i,j} + q_{i,j} = 1; \quad P_{\langle i,k,\dots,j \rangle} + q_{\langle i,k,\dots,j \rangle} = 1; \quad P(l_{i,j}) + q(l_{i,j}) = 1.$$

Вероятность исправного состояния сети связи определяется состоянием ее элементов: узлов и линий связи. Как правило, состояния узлов и линий связи взаимозависимы. Например, отказ узла связи приводит к отказу инцидентных с ним линий связи.

Расчет вероятности связности приводимых двухполюсных сетей достаточно прост и проводится путем замены групп последовательно или параллельно соединенных ребер на одно эквивалентное ребро,

При этом вероятности существования таких эквивалентных ребер определяются по формулам:

$$P_{\text{послед}} = p_1 \dots p_k;$$

$$P_{\text{пар}} = 1 - (1 - p_1) \dots (1 - p_k),$$

где  $P_{\text{послед}}$  и  $P_{\text{пар}}$  — вероятности существования ребер, заменяющих соответственно группы последовательно и параллельно соединенных ребер;  $p_1 \dots p_k$  — вероятности существования ребер заменяемой группы.

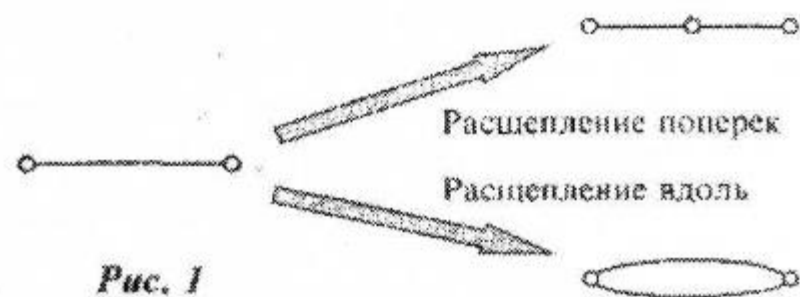


Рис. 1

- К сожалению, большая часть сетей имеет неприводимую структуру, и их вероятность связности не может быть рассчитана столь же просто.

- Для упрощения расчетов целесообразно делать возможные замены последовательно или параллельно соединенных ребер в одно ребро. Однако свести всю неприводимую сеть к одному ребру невозможно. Простейший пример неприводимой структуры дает известная мостиковая схема (рис. а).

- Простота расчетов вероятности связности приводимых сетей позволяет использовать их для получения двухсторонних оценок вероятности связности неприводимых сетей. Для исходной сети с графом  $G$  строятся такие две оценочные приводимые сети с графами  $G_*$  и  $G^*$ , что для их вероятностей связности имеют место неравенства

$$P(G_*) \leq P(G) \leq P(G^*)$$

- При этом благодаря приводимости структуры оценочных сетей расчет  $P(G_*)$  и  $P(G^*)$  для них гораздо проще, чем для исходной сети. Известны несколько способов построения оценочных сетей (оценка Эзари-Прошана – рис. б, в; оценка Литвака-Ушакова – рис. г, д).

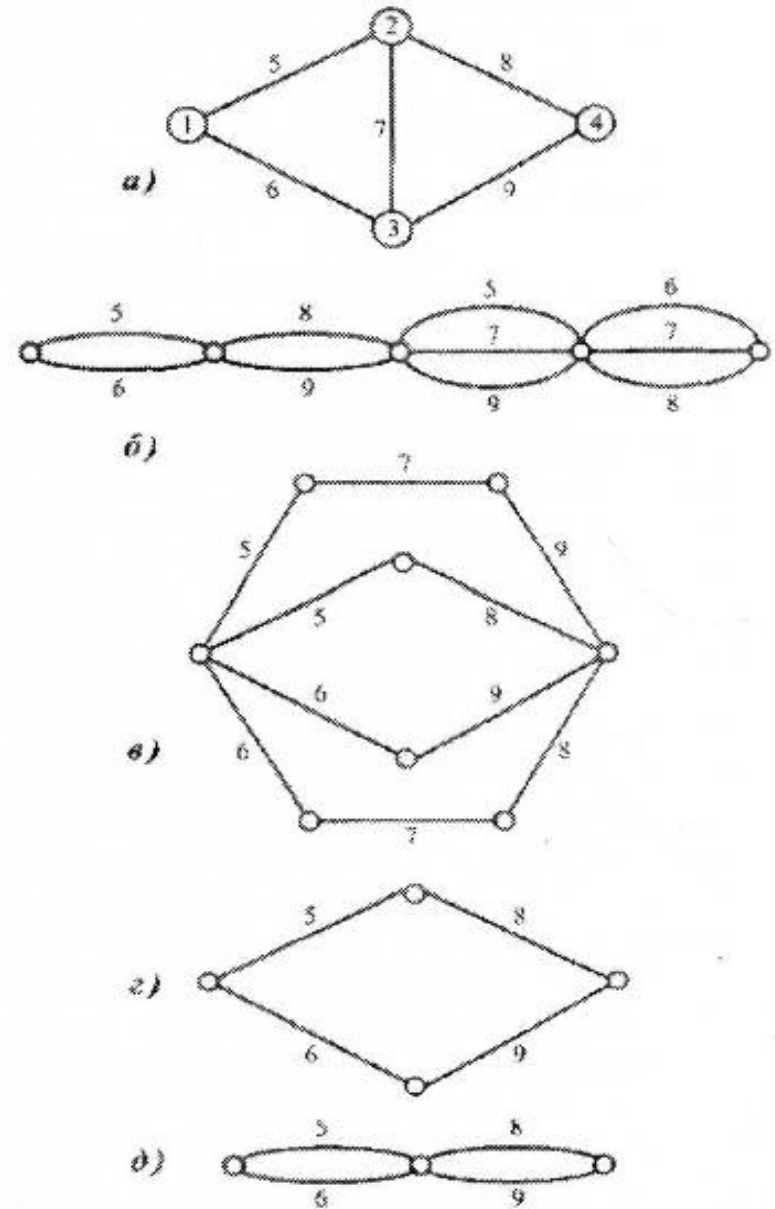


Рис.

## Методика оценки соответствия сети электросвязи заданным требованиям обеспечения устойчивости ее функционирования

Показатели устойчивости (надежности и живучести) сети электросвязи носят вероятностный характер, и их оценка осуществляется расчетным путем на основе показателей надежности и живучести элементов анализируемой сети электросвязи.

Методика расчетной оценки устойчивости (надежности и живучести) сети электросвязи основана на использовании математического аппарата случайных графов и нахождения связности между элементами графа с помощью метода перебора простых цепей (МППЦ). Сеть связи моделируется графом сети, вершинами и ребрами которого являются узлы и линии связи. Вершины графа представляют собой узлы связи, а ребра — совокупность линий связи (линий передачи), которые соединяют вершины графа между собой. Всем элементам графа (вершинам и ребрам) присваивают весовой коэффициент, представляющий собой коэффициент готовности узла или линии связи при расчете показателей надежности сети связи (при расчете показателей живучести весовыми коэффициентами являются коэффициенты оперативной готовности узлов и линий связи). На построенном графе сети связи выделяют два полюса (две вершины — «исток» и «сток»), которые отмечают выбранное направление связи.

Метод расчетной оценки связности между элементами графа с помощью перебора простых цепей заключается в том, что для выбранных полюсов графа сети, в соответствии с алгоритмом установления связи, отмечаются все цепи (или пути), по которым может быть установлено соединение. Под событием связности понимают такое событие, когда между «исток» и «сток» в работоспособном состоянии существует хотя бы одна простая цепь. Если между полюсами сети в работоспособном состоянии нет ни одной простой цепи, то в двухполюсной сети наступает событие несвязности. Под «простой цепью» понимают последовательность ребер и вершин графа без петель и параллелей, замыкающую полюсы (выбранные вершины) между собой. Далее на графе сети выделяют все простые цепи ( $\mu_{ij}$ ) между выделенной парой полюсов (узлов)  $v_i$  и  $v_j$  сети.

При заданных коэффициентах готовности (или оперативной готовности) для всех элементов графа связность двухполюсной сети между выделенными узлами  $v_i$  и  $v_j$  рассчитывается методом объединения простых цепей с учетом эффекта поглощения.

При практических расчетах перечень простых цепей или путей  $\mu_{ij}^k$  между узлами  $v_i$  и  $v_j$  ограничивают только теми путями, которые содержат допустимое число транзитных участков, зависящее от допустимого уровня искажений передаваемой по линии связи информации. Число транзитных участков определяет ранг простых цепей —  $r_{max}$ . Таким образом, полный перечень простых цепей между узлами связи определяется с учетом максимально допустимого числа транзитных участков (ограничения ранга простых цепей).

Связностью  $\rho_{ij}^k$   $k$ -го пути  $\mu_{ij}^k$  из перечня всех цепей  $\mu_{ij}$  называется совместная вероятность исправного состояния всех ребер и вершин, образующих эту цепь:

$$\rho_{ij}^k = \prod_{\forall a \in \mu_{ij}^k} (1 - q_a) = \prod_{\forall a \in \mu_{ij}^k} \rho_a, \quad (Б.1)$$

где  $\rho_a$  — коэффициент готовности (или оперативной готовности)  $a$ -го элемента последовательности ребер и вершин, принадлежащих пути  $\mu_{ij}^k$ ;

$q_a = (1 - \rho_a)$  — коэффициент неготовности (или оперативной неготовности)  $a$ -го элемента последовательности ребер и вершин, принадлежащего пути  $\mu_{ij}^k$  (при проведении реальных расчетов этим коэффициентом пользоваться удобнее, чем коэффициентом  $\rho_a$ ).

Вероятность связности  $\rho_{ij}$  от  $v_i$  к  $v_j$  — это вероятность исправного состояния хотя бы одной цепи из всех возможных цепей или (при ограничении числа транзитных участков  $r_{max}$ ) хотя бы одной цепи с допустимым рангом:

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}^{max} = 1 - \prod_{\forall \mu_{ij}^k \in m_{ij}} (1 - \rho_{ij}^k). \quad (Б.2)$$

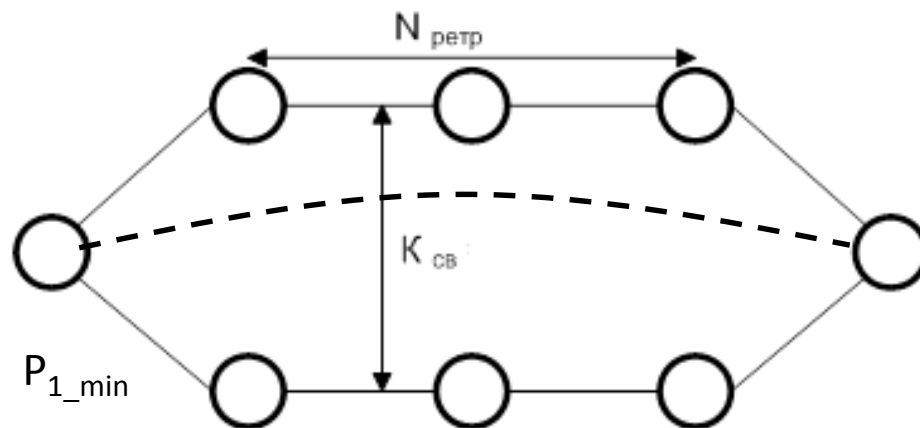
В реальных условиях цепи часто взаимозависимы, т.е. имеют общие ребра и вершины. При этом вероятность связности, вычисленная по формуле (Б.2), имеет завышенное значение. Действительное значение получится, если при вычислениях по формуле (Б.2) после раскрытия скобок все члены, имеющие показатели степени больше единицы, заменить на единицу, что соответствует исключению события многократного учета коэффициента готовности (или оперативной готовности) одного ребра или одной вершины. Такое действие обозначают символом  $E$  и называют поглощением. Формула для вычисления связности принимает следующий вид:

$$\rho_{ij} = E \left\{ \rho_{ij}^{\max} = 1 - \prod_{\forall \mu \begin{smallmatrix} k \\ ij \in m_{ij} \end{smallmatrix}} (1 - \rho_{ij}^k) \right\}. \quad (\text{Б.3})$$

Число перемножаемых сомножителей в формулах (Б.2) и (Б.3) равно числу простых цепей, а число перемножаемых сомножителей в формуле (Б.1) равно числу ребер и вершин в одной цепи. Таким образом, показатели надежности и живучести сети электросвязи (по вероятностям связности двухполюсного графа) вычисляют по формуле (Б.3).

# Экспресс-метод оценки нижней границы вероятности связности (метод «наихудший случай»)

Квази-эквивалентная структура



$$P_{эқв} = 1 - (1 - P_{1\_min}^{N_{ретр}+1})^{K_{св}}$$